فصل ۱ تا ۴
فصل به فصل

بنام خدا

درسنامه + روش های تستی

ریاضیات رشته تجربی

شامل

ریاضی ۱ - ریاضی ۲ - ریاضی ۳ - ریاضی ۴

آمار - هندسه (۱)

ویژگی های این مجموعه عبارتند از

۱ بصورت طبقه بندی شده و موضوعی است.

۲ مطابق با سرفصل های کتاب های درسی است.

۳ به ترتیب فصل به فصل و سال به سال تنظیم شده است.

۴ مطابق با تست های ریاضی کنکور سراسری برای رشته تجربی است.

۵ روش های سریع و کوتاه برای پاسخ سوالات است.

تهیه و تنظیم توسط آقای طاهر موسی

سال تحصیلی ۹۳-۹۲

امید موفق باشید کافی است اراده کنید.

۱) جاهایی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک خط و از یک نقطه برابر باشد.

۲) به این خط، خط هادی و به این نقطه کانون می‌گوییم.

۳) راس سهمی (S) وسط کانون و خط هادی است

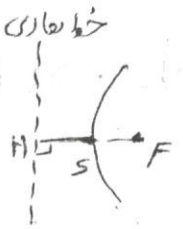
۴) نزدیک‌ترین نقطه به کانون و خط هادی راس سهمی است.

۵) سهمی افقی و به راست

$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$

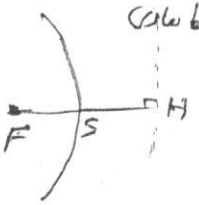
$S(\alpha, \beta)$

p پارامتر



۶) سهمی افقی و به چپ

$(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$



۷) در سهمی افقی y^2 داریم در قائم x^2 داریم

۸) سهمی قائم رو به بالا

$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$

۹) سهمی قائم رو به پایین

$(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$

۱۰) وتر کانونی عمود بر راستای SF و برابر $4p$ است.

۱۱) به امتداد SF محور تقارن سهمی می‌گوییم.

۱۲) روش‌های سریع

$Ax^2+Bx+Cy+D=0 \xrightarrow{\text{قائم}} x_S = -\frac{B}{2A}, \quad p = \left|\frac{C}{4A}\right|$

$Ay^2+By+Cx+D=0 \xrightarrow{\text{افقی}} y_S = -\frac{B}{2A}, \quad p = \left|\frac{C}{4A}\right|$

$y = ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{قائم}} y = \frac{-\Delta-1}{4a}, \quad p = \frac{1}{4a}$

۱۳) اگر کانون و خط هادی را دادند یک وسط آن‌ها و p نصف فاصله آن‌هاست.

۱۴) روش سریع

$x^2+4x+2y+1=0 \longrightarrow x_S = -\frac{4}{2} = -2$

$, \quad p = \left|\frac{C}{4A}\right| = \left|\frac{2}{4}\right| = \frac{1}{2}$

۲۷۰- آینه سهموی

۱) ویژگی های آینه سهموی همان آینه های فیزیکی است

۲) اگر پرتو موازی محور تکبر بازتاب از کانون عبور کند اگر از کانون نگذرد بازتاب موازی است

۳) زاویه تابش برابر زاویه بازتاب است

۴) در آینه سهموی داریم

معادله آینه $\longrightarrow x^2 = 4py$

مثال جالب: عمق آینه سهموی در مرکز 16^{cm} و قطر قاعده آینه 40^{cm} حساب کنید. فاصله راس تا کانون آینه چقدر است؟

$$x^2 = 4py \longrightarrow (20, 16) \longrightarrow p = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

مثال جالب دیگر: یک تلسکوپ آینه سهموی دارد که فاصله راس تا کانون 15^{cm} است. اگر قطر قاعده 80^{cm} باشد عمق آینه در مرکز را حساب کنید.

$$y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow S\left(\frac{1}{2}, 0\right), \; 4p = 2 \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow F(1, 0)$$

چند نکته از مقاطع مخروطی

۲۷۱- معادلات مماس و قائم بیضی

$$\begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 & \text{مماس} \\ \dfrac{a^2x}{x_0} - \dfrac{b^2y}{y_0} = c^2 & \text{قائم} \end{cases}$$

۲۷۲- اگر مماس های هذلولی را در هم ضرب کنیم برابر k قرار دهیم معادله هذلولی بدست می آید.

۲۷۳- در هذلولی مساوی الساقین $e = \sqrt{2}$

۲۷۴- مقدار e در بیضی $e = \sqrt{1 - \frac{\min(A,B)}{\max(A,B)}}$

۲۷۵- انتگرال ∫

مساحت زیر نمودار تابع را انتگرال می‌گوییم چون مجموع SUM می‌شود به جای انتگرال از حرف S که بصورت کشیده استفاده می‌کنیم ∫

۱) در واقع $\int_a^b f(x)dx$ یعنی مساحت

۲) این مساحت بین خط‌های $x=a$ و $x=b$، محور x ها و نمودار تابع قرار می‌گیرد.

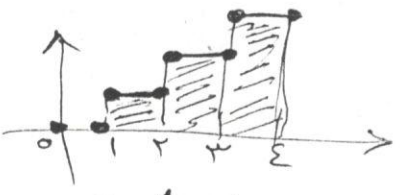
۳) به $x=a$ و $x=b$ حدود انتگرال می‌گوییم.

۴) dx یعنی محور x ها

۵) اگر نمودار زیر محور x ها باشد مساحت را منفی می‌گیریم.

۶) مساحت زیر تابع ثابت $f(x)=k$ می‌شود $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

مثال‌های جالب



$$\int_0^4 [x]\,dx = 1+2+3 = 6$$

$$\int_{-1}^{3} (x-[x])\,dx = 4\times\frac{1\times1}{2} = 2$$

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = -\frac{1\times1}{2} + \frac{2\times2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{-2}^{2} (x+[x])\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx + \int_{-2}^{2} [x]\,dx = -2$$

۲۷۶- قضیه‌ی اساسی توابع مساحت

تابع مساحت $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt \longrightarrow A'(x)=f(x)$

حالت کلی تابع مساحت $A(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \longrightarrow A'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$

یعنی مشتق انتگرال از a تا x می‌شود تابع توی انتگرال

$A(x)=\int_{۲}^{x}\frac{t}{\sqrt{۱+t^{۳}}}dt \longrightarrow y=xA(x)$ مشتق راست $(x=۲)$ ؟

$y'=A(x)+xA'(x) \longrightarrow A(۲)+۲A'(۲)=?$

$A'(۲)=\frac{۲}{\sqrt{۱+۲^{۳}}}=\frac{۲}{۳} \longrightarrow y'=۲(\frac{۲}{۳})=\frac{۴}{۳}$

$y=\int_{x}^{۲}e^{t}dt \longrightarrow y''-۴y'=?$

$\int_{x}^{۲}=-\int_{۲}^{x} \rightarrow y=-\int_{۲}^{x}e^{t}dt \rightarrow y'=-e^{x}, y''=-e^{x}$

$\Longrightarrow y''-۴y'=۳e^{x}$ نتیجه

۲۷۸- انتگرال نامعین: عکس مشتق

$\int f(x)dx=F(x) \longrightarrow F'(x)=f(x)$

۱) $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}+c$

۲) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

۳) $\int\frac{du}{u}=Ln|u| \longrightarrow \int\frac{dx}{x}=Ln|x|$

۴) $\int \sin ax\,dx=\frac{-۱}{a}\cos ax+c$

۵) $\int \cos ax\,dx=\frac{۱}{a}\sin ax+c$

۶) $\int(۱+tg^{۲}ax)dx=\frac{۱}{a}tg\,ax+c$

۷) $\int(۱+\cot^{۲}ax)dx=\frac{-۱}{a}\cot ax+c$

۸) $\int e^{x}dx=e^{x} \longrightarrow \int e^{ax+b}dx=\frac{۱}{a}e^{ax+b}+c$

۲۷۹- قضیه‌ی اساسی دوم

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

چند مثال جالب

$$\int_{۲}^{۳} \left[x + \frac{۱}{۲}\right] dx = \int_{۲}^{۲,۵} + \int_{۲,۵}^{۳} \longrightarrow ۲(۰/۵) + ۳(۰/۵) = ۲,۵$$

$$۲ < x < ۲,۵ \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} ۲,۵ < x + \frac{۱}{۲} < ۳ \longrightarrow \left[x + \frac{۱}{۲}\right] = ۲$$

$$۲,۵ < x < ۳ \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} ۳ < x + \frac{۱}{۲} < ۳,۵ \longrightarrow \left[x + \frac{۱}{۲}\right] = ۳$$

$$\int_{-۲}^{۴} (|x| + ۲x)\,dx \longrightarrow \int_{-۲}^{۰} + \int_{۰}^{۴}$$

$$\int_{-۲}^{۰} x\,dx + \int_{۰}^{۴} ۳x\,dx = \frac{x^۲}{۲}\Big|_{-۲}^{۰} + \frac{۳x^۲}{۲}\Big|_{۰}^{۴} = ۲۲$$

۲۸۰- چند مثال از انتگرال نامعین

$$\int \frac{dx}{۳x + ۲} = \frac{۱}{۳} \ln |۳x + ۲|$$

$$\int \frac{dx}{x^۲ + ۱} = \tan^{-۱} x + c$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int (۱ + \tan^۲ x)\,dx = \tan x + c$$

$$\int (۱ + \cot^۲ x)\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \tan^۴ x\,dx = \frac{۱}{۳}\tan^۳ x - \tan x + x + c$$

$$\int (\sin^۲ x + \cos^۲ x)\,dx = x + c$$

مجموعه نکته های تکمیلی

گویا کردن $\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$$

a, b متحدالعلامت $\longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

a, b مختلف العلامت $\longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \xrightarrow{A^2 - B = K^2} \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+K}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-K}{2}}$$

مثال $\sqrt{15 + \sqrt{29}} \xrightarrow{225 - 29 = 196} \xrightarrow{196 = 14^2} K = 14 \longrightarrow \sqrt{\frac{29}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

نمادعلمی $3\,\mathcal{E}\,000,18 = 3,\mathcal{E}\,0001\mathcal{8} \times 10^{+4}$

$\%\,003 = 3 \times 10^{-3}$

$5000 = 5 \times 10^{3}$

$A - B = A \cap B'$ ، $(A')' = A$ ، $A \cup M = M$ ، $A \cap M = A$

توان منفی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

آمار

۲۸۱- تعریف آمار : به معنی حقایقی است که بصورت اعداد و ارقام بیان می گردد.
به عنوان مثال آمار ازدواج - آمار درختان خیابان ولی عصر(عج) تهران - آمار جمعیت کشور

۲۸۲- روش های آماری : برای جمع آوری، خلاصه، طبقه بندی و تجزیه و تحلیل عددی است

۲۸۳- اندازه گیری : عملی است برای بدست آوردن اطلاعات عددی با روش خاص
انتخاب معیار اندازه گیری گاهی آسان نیست مانند اندازه گیری هوش افراد

۲۸۴- محدودیت اندازه گیری : عدم دقت وسایل اندازه گیری - خطای اندازه گیری ما

۲۸۵- تعریف دیگر اندازه گیری تخصیص معیار عددی به یک صفت است.

۲۸۶- اولین گام برای رسیدن به اطلاعات عددی اندازه گیری است

۲۸۷- تعریف مدل سازی : بیان مساله با زبان ریاضی است.

۲۸۸- مدل با ارزش تر مدلی است که ساده تر و ابتدایی تر باشد

۲۸۹- در مدل سازی نیاز به اندازه گیری داریم که همیشه خطا دارد.

۲۹۰- خطای اندازه گیری : مقدار خطا + مقدار اندازه گرفته = اندازه واقعی
این مقدار همیشه از یک کم تر است در موارد خیلی خیلی کوچک آن را صفر می گیریم یا E نشان می دهیم

۲۹۱- در محاسبات می توانیم از توان های E مانند E^2 و E^3 و ... صرف نظر کنیم

۲۹۲- فرمول های لازم برای مدل سازی ریاضی عبارتند از :

مساحت دایره $S=\pi r^2$ مربع $S=a^2$ مکعب مستطیل $V=abc$ کره $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

محیط دایره $P=2\pi r$ کره $S=4\pi r^2$ مربع $P=4a$ مستطیل $S=ab$

مستطیل $P=2(a+b)$ مکعب $V=a^3$ استوانه $V=\pi R^2 h$

توجه کنید که سایر فرمول های هندسی را می توانید از درسنامه هندسه (۱) بگیرید.

۲۹۳- وسایل اندازه گیری به گونه ای است که هیچ گاه به صفر نمی رسد.

۲۹۴- اگر چند متغیر داشتیم از حاصل ضرب خطاها صرف نظر می کنیم.

۱) حجم استوانه با شعاع ۳ و ارتفاع ۲ را مدل سازی کنید (خطای یکان E)

$$V=\pi r^2 h=\pi(3+E)^2(2+E)=\pi(18+9E+12E+6E^2+2E^2+E^3)$$

$$V=\pi(18+21E+\cancel{8E^2}+\cancel{E^3})=18\pi+21\pi E=18\pi+E'$$

۲) حجم مکعب مستطیل با ابعاد ۲، ۳، ۴ (خطای صفارت)

$$V=abc=(2+E_1)(3+E_2)(4+E_3)=(6+2E_2+3E_1+\cancel{E_1E_2})(4+E_3)$$

$$V=24+6E_3+8E_2+\cancel{2E_2E_3}+12E_1+\cancel{3E_1E_3}=24+6E_3+8E_2+12E_1$$

۳) مساحت دایره با شعاع $4+E$

$$S=\pi r^2=\pi(4+E)^2=\pi(16+8E+\cancel{E^2})=16\pi+8\pi E=16\pi+E'$$

۲۹۶- جامعه آماری: مجموعه ای از افراد یا اشیاء که درباره اعضای آن موضوع یا موضوعاتی را مطالعه می‌کنیم. البته به تعداد اعضای جامعه اندازه جامعه می‌گویند.

۲۹۷- نمونه: زیرمجموعه‌ای از جامعه آماری است. به تعداد اعضای نمونه اندازه نمونه می‌گوییم.

۲۹۸- سرشماری: اگر همه افراد جامعه را مطالعه کنیم سرشماری کرده‌ایم.

۲۹۹- مشکلات سرشماری:

۱) در دسترس نبودن اعضای آن ۲) وقت گیر بودن ۳) گران بودن

۴) از بین رفتن اعضا (یا تغییر اعضا)

در دسترس نبودن یعنی غایب بودن افراد در سرشماری جمعیت افراد خانه مثل نباشند.
در مدت زمان طولانی انجام می‌گیرد، تغییر تعداد کلکوی های در سال یا آتشفشان و زلزله، سیل و حوادث دیگر باعث می‌شود اعضا از بین برخیزند و تغییر کنند.

۳۰۰- تفاوت سرشماری با نمونه گیری: در سرشماری جامعه آماری کوچک در نمونه گیری جامعه آماری بزرگ

۳۰۱- ویژگی های اصلی جامعه توسط نمونه انجام می‌گیرد

۳۰۲- دو ویژگی نمونه مناسب: به اندازه کافی بزرگ باشد - تصادفی باشد

۳۰۳- مهم ترین بخش آمار نمونه گیری است.

۳۰۴- چه نمونه‌ای تصادفی است:

۱) امکان حضور هر عضو وجود داشته باشد ۲) قبل از انتخاب نمونه نتوانیم درباره آن نظر دهیم

۳۰۵- نمونه تصادفی به کمک ماشین حساب:

مثال - می‌خواهیم از ۱ تا ۱۵۰ عددی تصادفی انتخاب کنیم دکمه های ماشین حساب را

تصادفی می‌زنیم عدد ۰/۲۷۳ می‌دهد $0/273 \times 150 = 40/95 \xrightarrow[+1]{\text{حذف اعشار}} 41$

۳۰۶- تعریف داده: نتایج حاصل از اندازه گیری یا بررسی نمونه را داده گویند.

۳۰۷- روش های جمع آوری داده:

۱) پرسش شفاهی یا کتبی (مصاحبه حضوری و امتحانات مدرسه ای)

۲) مشاهده و ثبت وقایع (تصادفات رانندگی)

۳) آزمایش (مانند آزمایش کوه آتشفشان)

۴) داده‌های قبلی (مقایسه داوطلبان کنکور ۹۲ با ۹۱)

۳۰۸- متغیر تصادفی: موضوع یا موضوعاتی که مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۳۰۹- انواع متغیر: کمی (پیوسته - گسسته) کیفی (ترتیبی - اسمی)

۳۱۰- چند مثال جالب: گروه خونی (کیفی - اسمی) تعداد افراد (کمی - پیوسته)

مراحل زندگی انسان (کیفی - مرحله‌ای) رنگ چشم افراد (کیفی - اسمی) تعداد حافران (کمی - گسسته)

۳۱۱- چند نکته از انواع متغیرها

۱) کمی قابل اندازه گیری هستند و عددی به آنها تعلق می‌گیرد ولی کیفی اندازه گیری نمی‌شوند (نوع)

۲) می‌توانیم افراد را از نظر این متغیر هم قیاس کنیم (کمی)

۳) متغیر کیفی ترتیبی دارای مرحله و به ترتیب است مانند مراحل زندگی (تولد - ..... ازدواج - ... مرگ)

۴) متغیر پیوسته متغیری است که بین دو مقدار می‌توانیم مقدار دیگری در نظر بگیریم.

۳۱۲- چند مثال دیگر:

طول مکالمه تلفنی (کمی - پیوسته) رتبه های کنکور (کمی - گسسته)

میزان بارندگی (کمی - پیوسته) RH خون (کیفی - اسمی)

۳۱۳- دامنه تغییرات : R

$K = max - min = b - a$

۳۱۴- طول دسته : c طول است و K تعداد دسته

$C = \frac{R}{K}$

۳۱۵- مرکز هر دسته : $x_{i0} = \frac{\text{کران بالای هر دسته} + \text{کران پایین هر دسته}}{2} = \frac{a_i + b_i}{2}$

۳۱۶- معیار سریع برای پراکندگی است : دامنه تغییرات

۳۱۷- از جنس داده های اولیه است : دامنه تغییرات

۳۱۸- در متغیر کمی گسسته دسته بندی لازم نیست ولی در متغیر پیوسته لازم است

۳۱۹- اگر به همه داده ها مقدار ثابت اضافه شود دامنه تغییرات عوض نمی شود.

۳۲۰- اگر همه داده ها را n برابر کنیم دامنه تغییرات n برابر می شود.

۳۲۱- فراوانی مطلق : بین در هر دسته چند نفر وجود دارد

۳۲۲- فراوانی تجمعی : جمع فراوانی ها از طبقه اول تا طبقه مورد نظر

۳۲۳- فراوانی نسبی : فراوانی را به کل داده ها تقسیم می کنیم.

۳۲۴- مثال :

دسته	مرکز	مطلق	تجمعی	نسبی	درصد نسبی
۲-۶	۴	۴	۴	$\frac{4}{20}$	٪۲۰
۶-۱۰	۸	۶	۱۰	$\frac{6}{20}$	٪۳۰
۱۰-۱۴	۱۲	۱۰	۲۰	$\frac{10}{20}$	٪۵۰
		۲۰		۱	٪۱۰۰

۳۲۵- چند نکته جالب از این مثال :

۱) مجموع فراوانی مطلق برابر تعداد داده ها می شود.

۲) آخرین طبقه تجمعی برابر مجموع فراوانی مطلق است

۳) مجموع فراوانی نسبی همیشه ۱ و درصدآن ٪۱۰۰ می شود.

۴) طرز فراوانی تجمعی : اولین فراوانی مطلق تکرار شده با مطلق بعدی جمع شده الی آخر

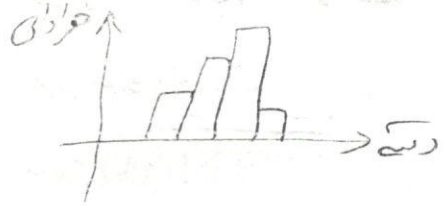
۵) مرکز هر دسته نیز میانگین دسته $۲-۶ \rightarrow \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$

۶) اگر F_{i0} مطلق و N تعداد کل داده ها شد f_{i0} نسبی $f_{i0} = \frac{F_{i0}}{N}$

۷) درصدی نسبی $P_{i0} = f_{i0}$ نسبی $\times$ ٪۱۰۰

۸) مجموع مطلق $\sum F_{i0} = N$

۳۲۶- نمودار مستطیلی: (هیستوگرام)

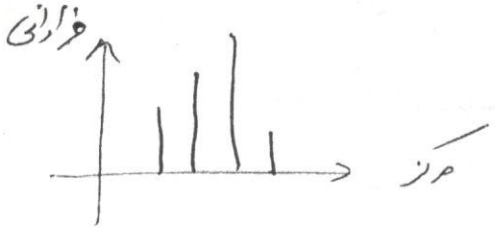


محور افقی حدود دسته و محور قائم فراوانی است.

این نمودار برای داده های کم و پیوسته خوب است.

هنگامی که دسته بندی لازم است و تعداد داده ها زیاد است نمودار خوبی است.

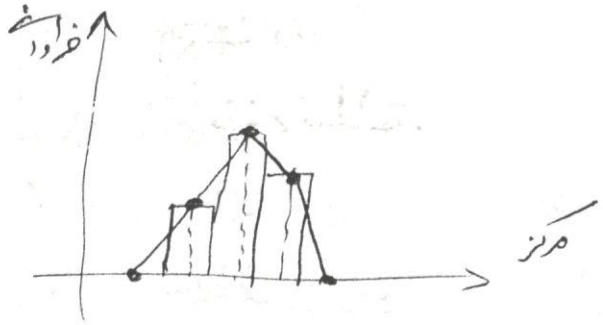
۳۲۷- نمودار میله ای:



محور افقی مرکز دسته است. ترتیب میله ها مهم نیست

مناسب داده های کیفی و کمی گسسته است.

۳۲۸- نمودار چندضلعی (چندپر):



انتهای میله ها را با خط شکسته وصل می کنیم

طول برابر مرکز دسته و عرض فراوانی است

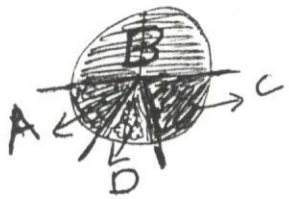
مناسب داده های کمی پیوسته است.

مساحت زیر نمودار چندپر برابر مساحت مستطیل است.

۳۲۹- نمودار دایره ای:

به هر دسته یک قطاع از دایره می دهیم زاویه این قطاع برابر $\theta = f_i \times 36^\circ$ یا $\theta = \frac{F}{N} \times 36^\circ$

مناسب داده های کیفی است.



	A	B	C	D
	۲۰	۵۰	۳۰	۱۰

۳۳۰- نمودار ساقه و برگ:

این نمودار هم داده ها را نشان می دهد

از سمت راست رقم آخر هر داده (برگ) و سایر ارقام (ساقه)

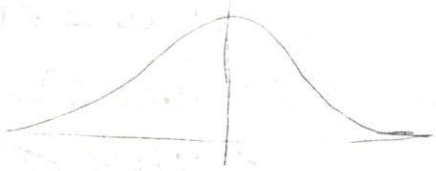
در برابر هر ساقه برگ های آن صعودی است.

ارتفاع هر میله فراوانی آن دسته است.

مثال: ساقه و برگ اعداد زیر در جدول رو برو رسم شده است

۴۵, ۴۴, ۴۱, ۴۰, ۳۹, ۲۸, ۲۷, ۲۳, ۱۵, ۱۱, ۱۰

ساقه	برگ
۱	۰ ۱ ۵
۲	۳ ۷ ۸
۳	۹
۴	۰ ۱ ۴ ۵



۳۳۱- منحنی نرمال: مد و میانه و میانگین برابرند
این منحنی همواره بیان کننده وضعیت متغیر جامعه است
در اکثر پدیده های طبیعی ظاهر می شود. متقارن و جسی زنگ است

۳۳۲- شاخص های مرکزی: میانه - مد - میانگین

۳۳۳- میانه:
۱) داده های را صعودی یا نزولی مرتب می کنیم.
۲) اگر تعداد فرد باشد عدد وسط اگر زوج باشد معدل دو عدد وسطی است.
۳) نصف داده ها از آن کمتر و نصف داده ها از آن بیشتر است.
۴) منحصر به فرد و یکتاست.

۳۳۴- مد:
داده ای است که از همه فراوان تر است
منحصر به فرد نیست
مد می تواند وجود نداشته باشد
تحت تاثیر ارقام کوچک و بزرگ قرار نمی گیرد
مناسب متغیر کیفی است

۳۳۵- میانگین: مجموع تقسیم بر تعداد یا صورت است

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

۳۳۶- اگر همه داده ها را n برابر کنیم میانگین میانه و مد هم n برابر می شود

۳۳۷- اگر همه داده ها را با عددی جمع کنیم میانگین میانه و مد هم با آن عدد جمع می شود

۳۳۸- مثال: ۳، ۴، ۳، ۳، ۵، ۳

میانه ← ۳، ۳، ۳، ۴، ۵ ← میانه = ۳

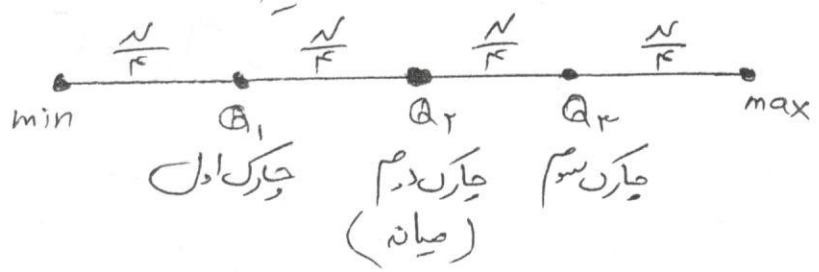
مد ← بیشترین فراوانی = ۳

میانگین ← $\frac{۳+۴+۳+۳+۵}{۵} = \frac{۱۸}{۵}$

۲۲۶ - چارک:

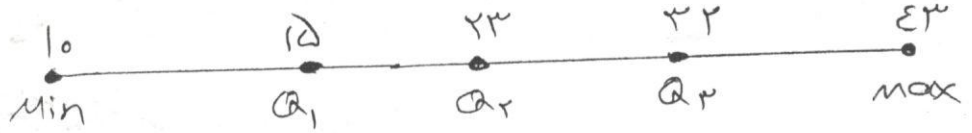
میانه خراوانی کل را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند. میانه همان چارک دوم است.

چارک‌ها خراوانی کل را به ۴ قسمت مساوی تبدیل می‌کنند. برای یافتن چارک‌ها اول میانه را پیدا می‌کنیم بعد میانه هر قسمت نوداده‌ها را پیدا می‌کنیم.



مثال - ۱۹، ۳۱، ۲۵، ۱۸، ۳۲، ۴۳، ۴۱، ۳۴، ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲

$min = 10$, $max = 43$, میانه $= 23$,



مرتب شده $\Rightarrow$ ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۳۱، ۳۲، ۳۴، ۴۱، ۴۳

۱۰: min — ۱۵: چارک اول — ۲۳: میانه، چارک دوم — ۳۲: چارک سوم — ۴۳: max

۲۴۰- ویژگی میانگین $\bar{x}$

$\overline{ax+b} = a\bar{x} + b$

۲۴۱- میانگین و میانه: میانگین برای مرکزیت داده‌ها خوب است.

در بعضی موارد از میانگین موثرتیت و میانه خوب است

۲۴۲- میانگین وزنی: درحالتی که هرعدد ضریب دارد استفاده می‌شود

مثال ← معدل کارنامه چون هر درس واحد خودش را دارد از میانگین وزنی استفاده می‌کنیم.

درس	زمین‌شناسی	شیمی	فیزیک	ریاضی
ضریب	۱	۲	۳	۴
نمره	۱۷	۲۰	۱۵	۱۸

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum F_i} = \frac{\overset{۱۷}{۱\times۱۷} + \overset{۴۰}{۲\times۲۰} + \overset{۴۵}{۳\times۱۵} + \overset{۷۲}{۴\times۱۸}}{۴+۳+۲+۱} = \frac{۱۷۴}{۱۰} = ۱۷/۴$$

۳۴۳ـ شاخص های پراکندگی :

۱) دامنه تغییرات ۲) انحراف از میانگین ۳) واریانس ۴) انحراف معیار ۵) ضریب تغییرات

۳۴۴ـ انحراف از میانگین :

یعنی داده ها را منهای میانگین کنید $\quad$ انحراف از میانگین $= x_i - \bar{x}$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

۳۴۵ـ واریانس :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

۳۴۶ـ بهترین معیار پراکندگی واریانس است. واحد آن مربع داده هاست.

۳۴۷ـ انحراف معیار : جذر واریانس است. $\quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

از جنس خود داده هاست. واحدش همان است (از جنس داده اولیه)

۳۴۸ـ ضریب تغییرات : $\quad C_v = \frac{S}{\bar{x}}$

واحد ندارد

۳۴۹ـ اگر همه داده ها برابر باشند واریانس صفر است و برعکس

۳۵۰ـ اگر همه اعداد با عددی + یا ـ شوند σ^2 و σ ثابت می مانند.

۳۵۱ـ اگر همه اعداد در عدد ثابت k یا $(\div)$ شود σ^2 و σ تغییر می کنند.

۳۵۲ـ اگر همه عددها را در عددی ضرب کنیم CV ثابت می ماند

۳۵۳ـ اگر همه داده ها را با عددی + یا ـ کنیم CV تغییر می کند
(مگر یکی)

۳۵۴ـ چند فرمول مهم

$$\begin{cases} \sigma^2_{a+x} = \sigma^2_x \\ \sigma^2_{ax} = a^2 \sigma^2_x \\ \sigma^2_{ax+b} = a^2 \sigma^2_x \\ \sigma_{ax+b} = |a| \sigma_x \end{cases}$$

هندسه

فصل اول: هندسه و استدلال

زاویه حاده ← بین ۰ تا ۹۰ درجه　　زاویه قائمه ← زاویه ۹۰ درجه

زاویه منفرجه ← زاویه بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه　　زاویه نیم صفحه ← ۱۸۰ درجه

۳۵۵- دو زاویه متقابل به راس: راس مشترک و اضلاع در امتداد هم　$\hat{\alpha}=\hat{\beta}$

۳۵۶- استدلال استنتاجی: نتیجه گیری کلی برمبنای حقایق که درستی آنها را پذیرفته ایم
اثبات قضیه ها بصورت استنتاجی است.

۳۵۷- استدلال استقرایی: با بررسی حالات مختلف نتایج کلی را حدس می زنیم
نتیجه قطعی نمی توان گرفت - تقویت شهود و ارائه اطلاعات مفید

۳۵۸- دو زاویه مجانب (مکمل): مجموع آنها ۱۸۰ درجه می شود　$\hat{\alpha}+\hat{B}=180$

۳۵۹- دو زاویه متمم: مجموع آنها ۹۰ درجه است.　$\hat{\alpha}+\hat{B}=90$

۳۶۰- تعریف نشده: واژه یا مفهومی که تعریف صریح ندارد مانند نقطه و خط

۳۶۱- اصول: به حقایق یا عبارت های درست می گویند. مثل: از دو نقطه متمایز فقط یک خط عبور می کند.

۳۶۲- هم نهشتی: به دو شکل انطباق کامل شکل ها می گویند که کاملاً روی هم می افتند

۳۶۳- مثلث متساوی الاضلاع: برابری هر سه ضلع و برابری هر زاویه ۶۰ درجه است.

۳۶۴- مثلث متساوی الساقین: برابری دو ضلع از مثلث　$a=b \Leftrightarrow \hat{\alpha}=\hat{B}$

۳۶۵- مثلث قائم الزاویه: یک زاویه ۹۰ می شود

۳۶۶- متوازی الاضلاع: چهارضلعی که ضلع های روبرو دو به دو موازی هستند

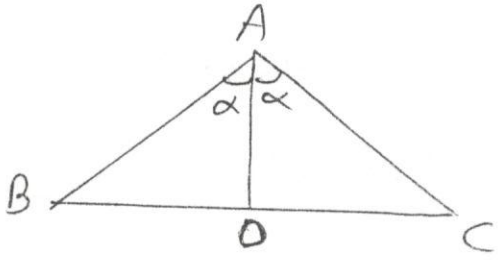
۳۶۷- نیم ساز، ارتفاع، میانه و عمود منصف:

نیم ساز زاویه را نصف می کند. (AD)

ارتفاع بر ضلع روبرو عمود است

میانه ضلع روبرو را نصف می کند

عمود منصف هم عمود و هم نصف می کند.



۳۶۸- مجموع زوایای n ضلعی $\begin{cases} \text{داخلی} = (n-2)\times 180 \text{ یا } (2n-4)\times 90 \\ \text{خارجی} = 360 \end{cases}$

۳۶۹- خم مطلق: مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم مانند یم خط - خط - پاره خط

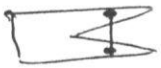
۳۷۰- خم ساده: خم مطلق است که هیچ یک از نقطه‌های خودش را قطع نکند مگر در انتهایش مانند دایره - س - ⊿ که این آخری خم ساده نیست

۳۷۱- خم بسته: به خمی می‌گوییم که نقطه‌های انتهایی بر هم منطبق باشند مانند دایره ← خم مطلق بسته ساده است. ← خم مطلق بسته غیر ساده

۳۷۲- خم جردن: هر خم سادهٔ بسته صفحه را به ۳ زیر مجموعه جدا از هم شامل درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

۳۷۳- چند ضلعی: خم ساده بسته است که از اجتماع حداقل ۳ پاره خط تشکیل شده است به گونه‌ای که نقاط انتهایی پاره خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه متوالی آنها روی یک خط نباشد

۳۷۴- ناحیه محدب: مجموعه‌ای از نقاط است که اگر پاره خطی از ۲ نقطه دلخواه آن را وصل کند درون ناحیه قرار می‌گیرد. ⬡ یا ⬭

۳۷۵- ناحیه غیر محدب: مجموعه از نقاط است که اگر پاره خطی دو نقطه دلخواه آن را وصل کند درون آن قرار نمی‌گیرد. 

۳۷۶- لوزی: متوازی الاضلاع که هر چهار ضلع آن برابرند.

۳۷۷- مستطیل: چهار ضلعی که ضلع‌های روبرو دو به دو برابر و هر زاویه آن ۹۰ درجه است

۳۷۸- مربع: چهار ضلعی که هم متوازی الاضلاع برابر و هر زاویه ۹۰ درجه است

۳۷۹- در هر متوازی الاضلاع ضلع‌های موازی برابر، زاویه‌های روبرو برابر و زاویه‌های مجاور ۱۸۰° یا مکمل هم هستند

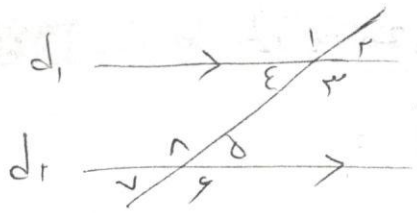
۳۸۰- در هر متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند

۳۸۱- در هر مستطیل قطرها برابر و همدیگر را نصف می‌کنند.

۳۸۲- در هر لوزی قطرها عمود و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۳۸۳- اگر دو زاویه برابر باشند مکمل های آنها نیز برابرند.

۳۸۴- قضیه خطوط موازی:

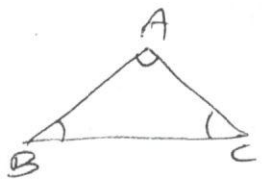


$\hat{1}=\hat{3}=\hat{8}=\hat{6}$

$\hat{2}=\hat{4}=\hat{5}=\hat{7}$

$\hat{1}+\hat{2}=\hat{3}+\hat{4}=180$

۳۸۵- مجموع زوایای داخلی ۱۸۰ و مجموع زوایای خارجی ۳۶۰ درجه است.



$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180$

$\hat{\alpha}+\hat{B}+\hat{x}=360$

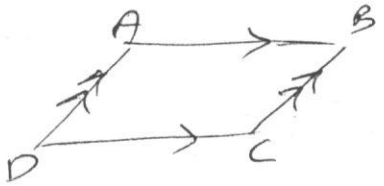
۳۸۶- در مثلث متساوی الاضلاع برابری هر سه ضلع و برابر هر زاویه ۶۰ درجه است.

۳۸۷- در مثلث متساوی الساقین

$a=b \iff \hat{\alpha}=\hat{\beta}$

۳۸۸- در دو مثلث متساوی الاضلاع نیم ساز ارتفاع میانه برهم منطبق هستند

۳۸۹- در هر متوازی الاضلاع



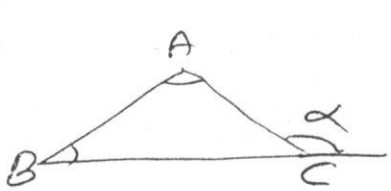
$\hat{A}=\hat{C}$, $\hat{B}=\hat{D}$

$\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180$

$AB=DC$, $AD=BC$

$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

۳۹۰- هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است



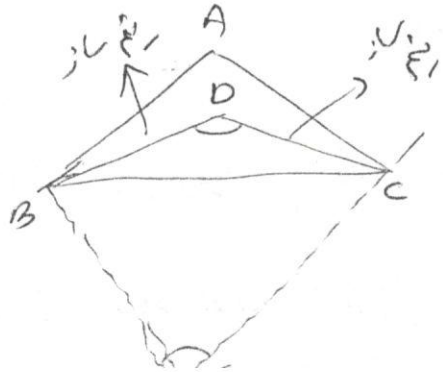
$\hat{\alpha}=\hat{A}+\hat{B}$

۳۹۱- تعداد قطرهای n ضلعی محدب برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$

۳۹۲- اگر α و β مجاور باشند زاویه بین نیم سازهای آن‌ها $\frac{\alpha+\beta}{2}$ است.

نیم سازهای دو زاویه مکمل برهم عمودند. نیم سازهای دو زاویه متمم با هم 45° درست می‌کنند

۳۹۳- در هر مثلث زاویه بین دو نیم ساز داخلی می‌شود 90° به علاوه نصف زاویه سوم



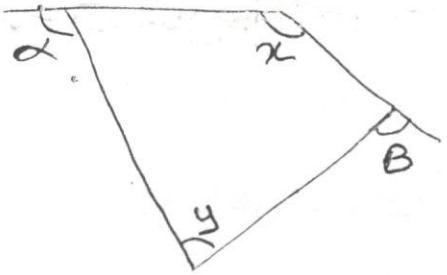
$\hat{D}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$

۳۹۴- زاویه بین دو نیم ساز خارجی

$\hat{E}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$

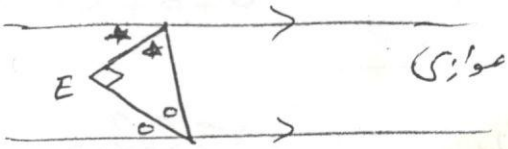
۳۹۵- زاویه بین یک نیم ساز خارجی و یک نیم ساز داخلی می شود نصف زاویه سوم

۳۹۶- رابطه معروف:



$$\hat{\alpha}+\hat{B}=\hat{x}+\hat{y}$$

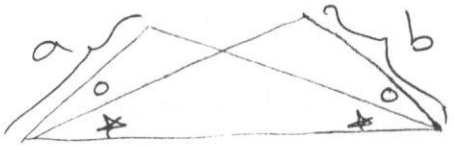
۳۹۷- زاویه معروف:



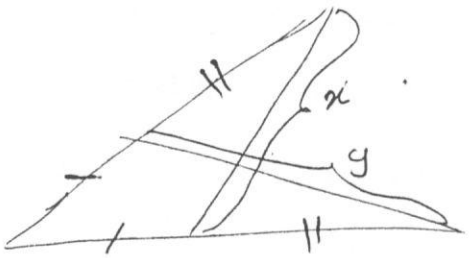
$$\longrightarrow \hat{E}=90^\circ$$

۳۹۸- دو مثلث هم نهشت: ض ض ض - ض ز ض - ز ض ز

۳۹۹- دو برابری مهم:

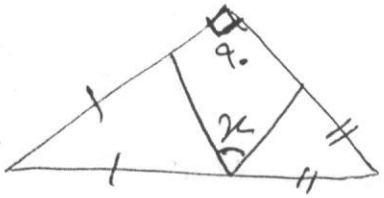


$$\Longrightarrow a=b$$



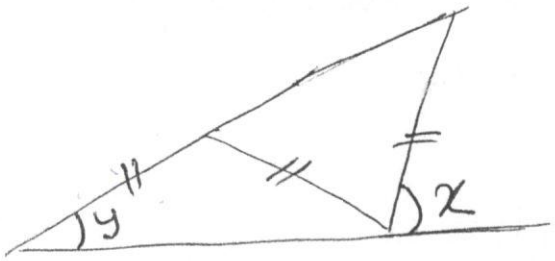
$$\Longrightarrow x=y$$

۴۰۰- رابطه مهم در مثلث قائم الزاویه:



$$\Longrightarrow \hat{x}=45^\circ$$

۴۰۱- رابطه سه برابر:



$$\Longrightarrow \hat{x}=3\hat{y}$$

۴۰۲- در هر مثلث قائم الزاویه برقرار است:

مجموع مربعات دو ضلع دیگر = مربع وتر

۲۰۳ـ مساحت شکل‌های هندسی

مستطیل S = طول × عرض $\rightarrow S = ab$

محیط P = ۲(طول + عرض) $\rightarrow P = ۲(a+b)$

مربع $S = a^۲$

محیط $P = ۴a$

مثلث $S = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$ $\xrightarrow[h]{a}$ $S = \frac{۱}{۲}ah_a$

قائم‌الزاویه $S = \frac{\text{حاصل‌ضرب اضلاع}}{۲}$ $\xrightarrow{b,c}$ $S = \frac{bc}{۲}$

متوازی‌الاضلاع $S = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$ $\xrightarrow[h]{a}$ $S = ah$

لوزی $S = \frac{\text{حاصل‌ضرب قطرها}}{۲}$

ذوزنقه $S = \frac{(\text{مجموع دو قاعده}) \times (\text{ارتفاع})}{۲}$

متساوی‌الاضلاع $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

ارتفاع متساوی‌الاضلاع $h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

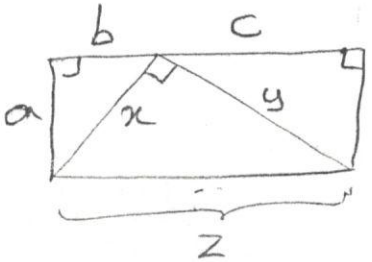
شش‌ضلعی منتظم $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$

۲۰۴ـ رابطه ضلع مربع و قطر آن

در مربع ضلع a قطر b: $b = a\sqrt{۲}$

۲۰۵ـ

در مستطیل



$a^۲ = bc$

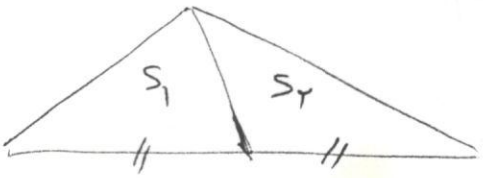
$z = \sqrt{۲a^۲ + b^۲ + c^۲}$

۴۰۶ـ اگر ارتفاع دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده‌هاست.

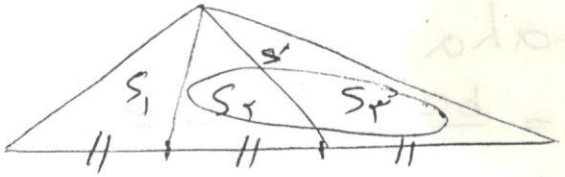
۴۰۷ـ اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت آنها برابر نسبت ارتفاع‌های آنهاست.

۴۰۸ـ اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند مساحت آن برابر نصف ضرب اقطار است.

۴۰۹ـ <u>رابطهٔ مساحت‌ها:</u>

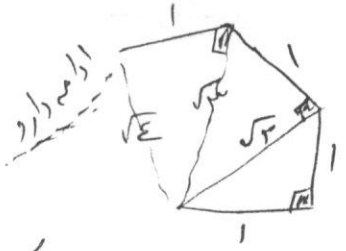


$\Longrightarrow S_1 = S_2$



$\Longrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \text{ و } S' = 2S_1$

۴۱۰ـ <u>تعمیم مثلث قائم‌الزاویه:</u>



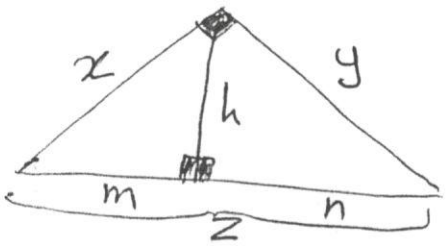
الف) طول n امین پاره‌خط $\sqrt{n+1}$

ب) مساحت n امین مثلث $\frac{\sqrt{n}}{2}$

۴۱۱ـ اگر وسط‌های ضلع را وصل کنیم مساحت ضلع کوچک $\frac{1}{2}$ مساحت اولیه می‌شود. والی آخر

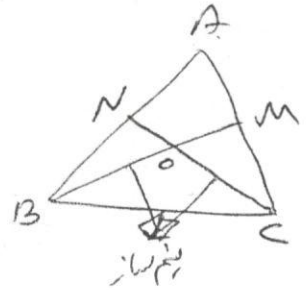
۴۱۲ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌روی $30°$ نصف وتر است.

۴۱۳ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:



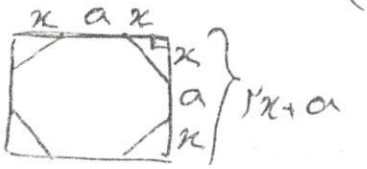
$$\begin{cases} h^2 = m \times n \\ x^2 = mz \,,\; y^2 = nz \\ xy = hz \end{cases}$$

۴۱۴ـ <u>در مثلث متساوی‌الاضلاع وبرعکس</u>



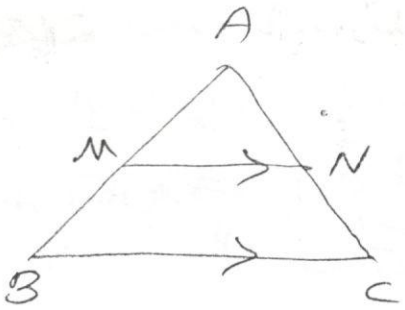
$$\begin{cases} \frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = 2 \\ \frac{OM}{BM} = \frac{ON}{NC} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۴۱۵ـ در ۸ ضلعی منتظم داریم:



فصل سوم : تشابه

۴۱۶ - قضیه تالس : اگر $MN \parallel BC$ باشد :



$$\begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} & \text{جزء به جزء} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} & \text{جزء کل} \end{cases}$$

۴۱۷ - عکس قضیه تالس : برقراری جزء کل یا جزء به جزء $\Rightarrow MN \parallel BC$

۴۱۸ - میانگین هندسی :

وقتی x میانگین هندسی y و z است، $x^2 = yz \Rightarrow x = \sqrt{yz}$

۴۱۹ - خواص تناسب : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \;,\; \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

۴۲۰ - دو مثلث متشابه :

۱) برابری دو زاویه ۲) تناسب دو ضلع برابری زاویه بین ۳) تناسب ۳ ضلع

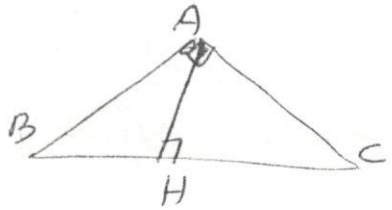
۴۲۱ - در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع و نسبت محیط برابر نسبت تشابه است.

۴۲۲ - در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

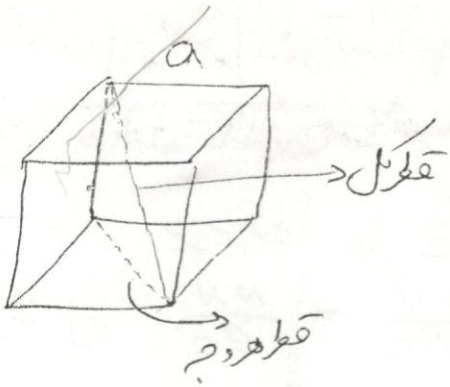
۴۲۳ - در دو مثلث متشابه نسبت نیم سازها، ارتفاع و میانه برابر نسبت تشابه است.

۴۲۴ -

۴۲۵ - در مثلث قائم الزاویه

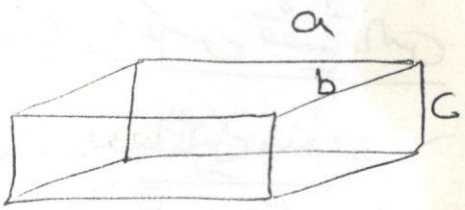


$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$$



۴۲۶ - مکعب:
همه یال ها برابر و همهٔ وجه ها مربع هستند
طول قطر وجه $a\sqrt{2}$ طول قطر کل $a\sqrt{3}$
مساحت وجه a^2 مساحت کل $6a^2$ و حجم a^3 می‌باشد.

۴۲۷ - مکعب مستطیل:



همه وجه ها مستطیل هستند
قطر وجه ها به ترتیب $\sqrt{a^2+b^2}$، $\sqrt{a^2+c^2}$ و $\sqrt{b^2+c^2}$ است.
قطر کل هم برابر $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ می‌شود.
مساحت کل $2(ab+ac+bc)$ و حجم کل abc است ← $V=abc=sh$

۴۲۸ - منشور: $\geq$ قاعده مساوی در بالا و پایین که موازی و کنارها متوازی الاضلاع است.
قاعده‌اش هر چند ضلعی می‌تواند باشد.
مساحت جانبی آن محیط قاعده ضرب در ارتفاع ← $S'_w=Ph$
مساحت کل $S=2S+Ph$
حجم آن $V=sh$

۴۲۹ - منشور با قاعدهٔ مثلث متساوی الاضلاع: حالت خاص منشور
جانبی $S'=3ah$ ، قاعده $S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
کل $S=2S_1+S'$

۴۳۰ - استوانه:
مساحت جانبی $S'=2\pi rh$
مساحت کل $S=2\pi rh+2\pi r^2$
حجم آن $V=Sh=(\pi r^2)h=\pi r^2h$

۴۳۱ - کره: شبیه هرم های زیاد
حجم آن $V=\frac{4}{3}\pi r^3$
مساحت آن $S=4\pi r^2$

طبق اصل کاوالیری
حجم مخروط = حجم استوانه = حجم یک کره